Report

1 Problem 1

1.a

1.a.a

$(m_1+m_2)d_1''+b_1d_1'+g(m_1+m_2)=f_1 \implies$
$d_1''=\frac{-b_1}{m_1+m_2}d_1+[\frac{f_1}{m_1+m_2}-g\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}]$
Θέτω $y_1=d_1, y_2=d_1', y_2'=d_1''$
$y_2'=\frac{-b_1}{m_1+m_2}y_2+[\frac{f_1}{m_1+m_2}-\frac{g(m_1+m_2)}{m_1+m_2})]$
$y_2=\frac{-k}{r}+ce^{rt}$
$y_2=\frac{f_1-g(m_1+m_2)}{b_1}+ce^{\frac{-b_1}{m_1+m_2}t}$
$y_2(0)=0 \implies \frac{f_1-g(m_1+m_2)}{b_1}+c=0 \implies$
$c=-\frac{f_1-g(m_1+m_2)}{b_1}$
$d_1'=y_2=\frac{f_1-g(m_1+m_2)}{b_1}(1-e^{\frac{-b_1}{m_1+m_2}t})$
$d_1''=y_2'=\frac{f_1-g(m_1+m_2)}{b_1}\cdot\frac{b_1}{m_1+m_2}\cdot e^{\frac{-b_1}{m_1+m_2}t}$
$Taylor:$
$d_{1_{n+1}}=d_{1_n}+h\cdot d_1'+\frac{h^2}{2}\cdot d_1''$

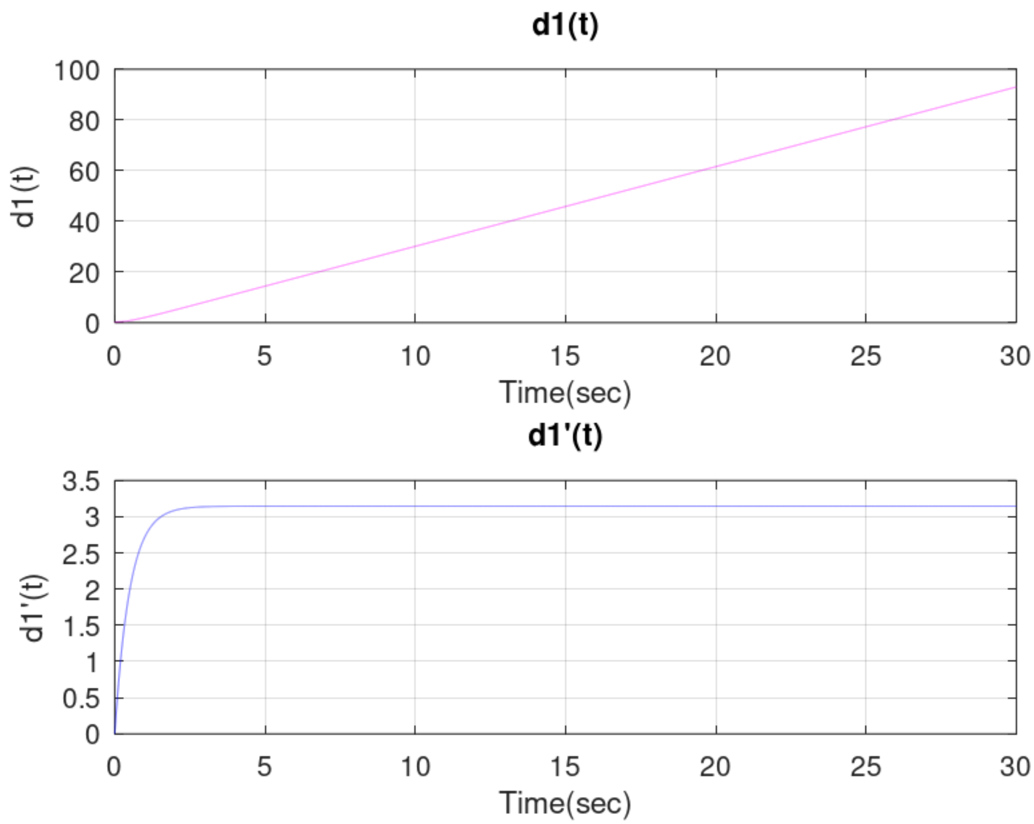
$m_2d_2''+b_2d_2'=f_2 \implies$
$m_2d_2''=f_2-b_2d_2' \implies$
$d_2''=\frac{f_2}{m_2}-\frac{b_2d_2'}{m_2} \implies$
$d_2''=\frac{-b_2}{m_2}d_2'+\frac{f_2}{m_2} \implies$
Θέτω $y_1=d_2, y_2=d_2', y_2'=d_2''$
$y_2'=\frac{-b_2}{m_2}y_2+\frac{f_2}{m_2}$
$y_2=\frac{-k}{r}+ce^{rt}=\frac{f_2}{b_2}+ce^{\frac{-b2}{m2}t}$
$y_2(0)=0=d_2'(0)=\frac{f_2}{b_2}+ce^{\frac{-b_2}{m_2}0}=0$
$c=\frac{-f_2}{b_2}$
$y_2(t)=d_2'(t)=\frac{f_2}{b_2}-\frac{f_2}{b_2}e^{\frac{-b_2}{m_2}t}=\frac{f_2}{b_2}(1-e^{\frac{-b_2}{m_2}t})$
$y_2'(t)=d_2''(t)=\frac{f_2}{m_2}e^{\frac{-b_2}{m_2}t}$
$Taylor:$
$d_{2_{n+1}}=d_{2_n}+hd_2'+\frac{h^2}{2}d_2''$

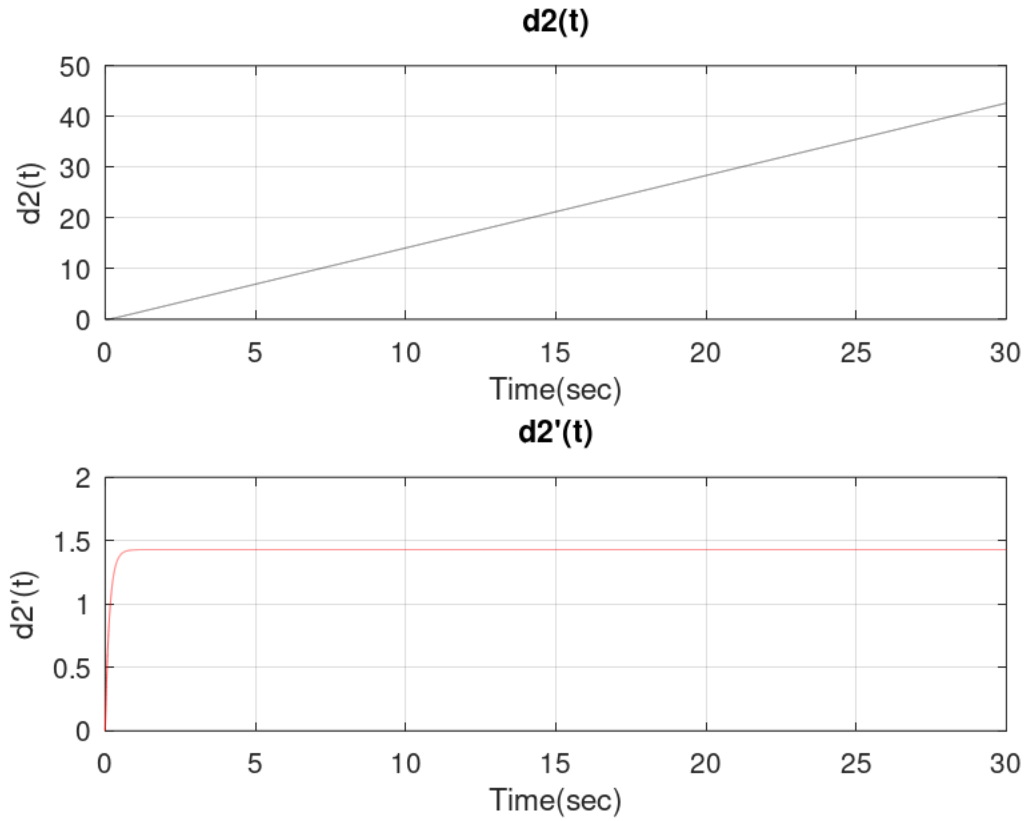
1.a.b

Program

1.a.c

Παραστάσεις d_1, d_1', d_2, d_2' :





1.b

1.b.a

Θεωρώ $x_1 = x = d_1$ για πιο ευανάγωστο συμβολισμό.

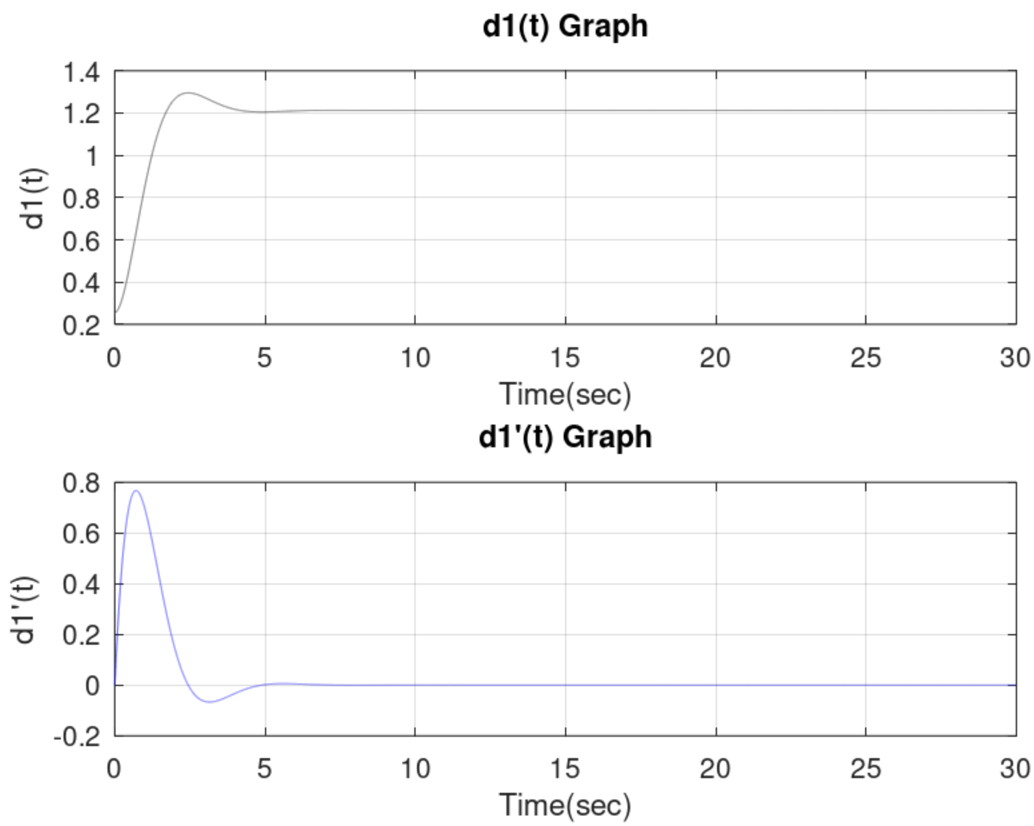
$x_1 = x$
$x_2 = x' = x_1'$
$x_2' = x''$
$(m1+m2)x'' + b_1 x' + K_{p1}x = K_{p1}d_{1des} \implies$
$x'' = \frac{-K_{p1}}{m1+m2}x - \frac{b1}{m1+m2}x' + \frac{K_{p1}d_{1des}}{m1+m2} \implies$
$x_2' = \frac{-K_{p1}}{m1+m2}x_1 - \frac{b1}{m1+m2}x_2 + \frac{K_{p1}d_{1des}}{m1+m2}$

$x(0) = x_1(0) = d_1(0) = 0.25625$
$x'(0) = x_1'(0) = d_1'(0) = 0$
$Taylor:$
$x_{1_{n+1}} = x_1 + hx_1' = x_1 + hx_2$
$x_{2_{n+1}} = x_2 + hx_2' = x_2 + h\left(\frac{-K_{p1}}{m_1+m_2} - \frac{b_1}{m_1+m_2}x_1 + \frac{K_{p1}}{m_1+m_2}d_{1des}\right)$

1.b.b

Για το πρόγραμμα ισχύει, $x_1 = d_1, x_2 = d_1'$

1.b.c



2 Problem 2

2.a

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' + g(m_1 + m_2) = g(m_1 + m_2) + K_{p1}(d_{1des} - d_1) \implies$

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' = K_{p1}(d_{d1des} - d_1) \implies$

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' + K_{p1} d_1 = K_{p1} d_{d1des} \implies$

$d_{1des} = \frac{(m_1+m_2)}{K_{p1}} d_1'' + \frac{b_1}{K_{p1}} d_1' + d_1 \implies$

$\frac{d_{1des}}{s} = \frac{(m1+m2)}{K_{p1}} \cdot s^2 \cdot d_1(s) + \frac{b1}{K_{p1}} \cdot s \cdot d_1(s) + d_1(s) \implies$
$D_1(s)\left(\frac{(m1+m2)}{K_{p1}} \cdot s^2 + \frac{b1}{K_{p1}} \cdot s + 1\right) = D_{1des}(s) \implies$

$H(s) = \frac{D_1(s)}{D_{1des}(s)} = \frac{1}{\frac{(m1+m2)}{Kp1} \cdot s^2 + \frac{b1}{K_{p1}} \cdot s + 1} = \frac{1}{(s-x1)(s-x2)}$
$where:$
$x_1 = \frac{\frac{-b_1}{K_{p1}} + \sqrt{(\frac{b_1}{K_{p1}})^2 - 4\frac{(m_1+m_2)}{K_{p1}}}}{2\frac{(m_1+m_2)}{K_{p1}}}$
$x_2 = \frac{\frac{-b_1}{K_{p1}} - \sqrt{(\frac{b1}{K_{p1}})^2 - 4\frac{(m_1+m_2)}{K_{p1}}}}{2\frac{(m_1+m_2)}{K_{p1}}}$
$Zeroes = \infty$
$Poles = x_1, x_2$

2.b

$x_1 = -1 + i1.28452$
$x_2 = -1 - i1.28452$

2.c

Παρατηρούμε ότι για $K_{p1} = 1$ και $K_{p1} = 2$ η απόκριση στο πεδίο του χρόνου είναι υπεραπόσβεση, ενώ για $K_{p1} > 2$ η απόκριση στο πεδίο του χρόνου είναι υποαπόσβεση. Επίσης παρατηρούμε ότι για $K_{p1} = 1$ και $K_{p1} = 2$ δεν υπάρχει μιγαδίκο μέρος. Αντιθέτως για $K_{p1} > 2$ το μέτρου του μιγαδικού μέρους αυξάνεται. Συνεπώς το σύστημα είναι ασταθές.
(Έχει δημιουργηθεί βίντεο μικρού μήκους στο GNU Octave(Askisi2g.m) για την καλύτερη απεικόνιση αλλαγών θέσεων)

2.d

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' + g(m_1 + m_2) = g(m_1 + m_2) + K_{p1}(d_{1des} - d_1) \implies$

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' = K_{p1}(d_{d1des} - d_1) \implies$

$(m_1 + m_2)d_1'' + b_1 d_1' + K_{p1} d_1 = K_{p1} d_{d1des}$

Χ.Ε : $(m_1 + m_2)r^2 + b_1 r + Kp_1 = 0 \implies r_{1,2} = -1 + i\frac{\sqrt{165}}{10}, -1 - i\frac{\sqrt{165}}{10}$

άρα $d_1(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot cos(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot sin(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10})$
Μερική Λύση : $D_1(t) = A \implies D_1'(t) = 0 \implies D_1''(t) = 0$

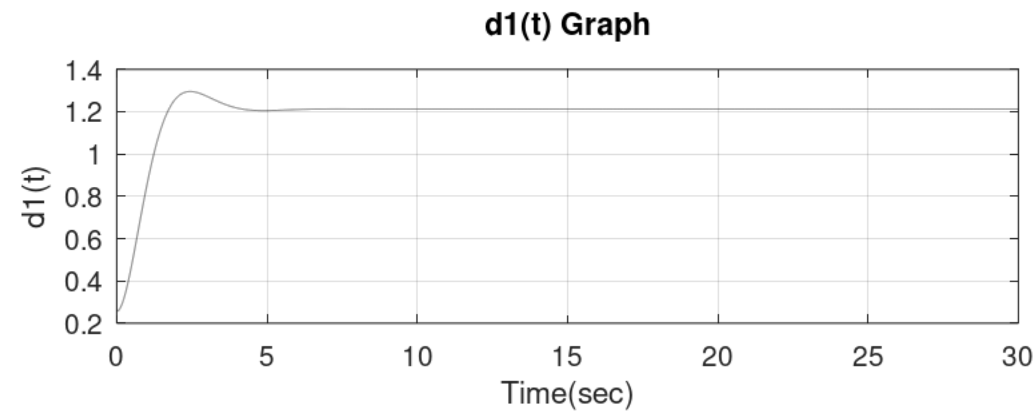
Αντικατάσταση : $K_{p1}A = K_{p1}d_{1des} \implies A = d_{1des}$

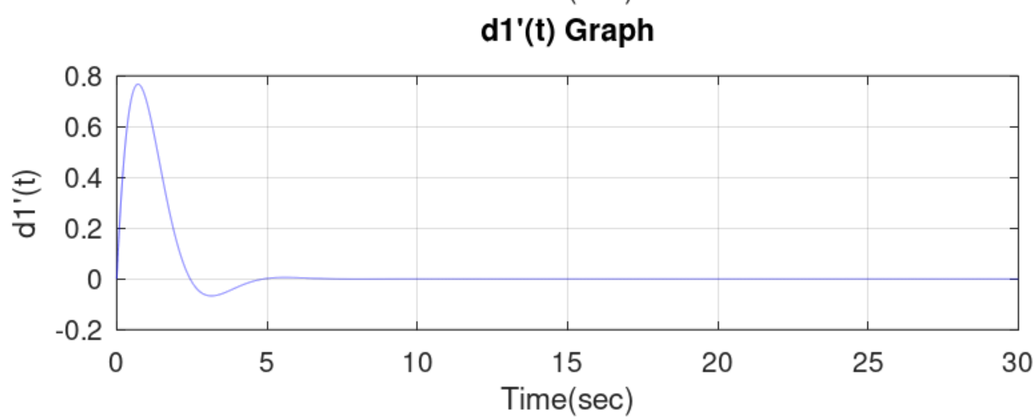
Γενική Λύση: $d_1(t) = d_{1des} + c_1 \cdot e^{-t} \cdot cos(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot sin(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10})$

$d_1'(t) = -c_1 \cdot e^{-t} \cdot cos(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) - c_1 \cdot e^{-t} \cdot sin(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) \cdot \frac{\sqrt{165}}{10} - c_2 \cdot e^{-t} \cdot sin(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot cos(t \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}) \cdot \frac{\sqrt{165}}{10}$
$d_1(0) = 0.25625 \implies d_{1des} + c_1 = 0.25625 \implies c_1 = -0.95625$
$d_1'(0) = 0 \implies -c_1 + c_2 \cdot \frac{\sqrt{165}}{10} = 0 \implies c_2 = \frac{10}{\sqrt{165}} \cdot c_1 \implies c_2 = -0.74443$

2.e

t(sec)	$d_1, 1bg(t)$	$d_1, 1e(t)$
0	0.2565	0.2562
3	1.2729	1.2728
4	1.2176	1.2177
8	1.2129	1.2129
20	1.2125	1.2125
30	1.2125	1.2125





Όπως φαίνεται από τον πίνακα και το διάγραμμα οι του τιμές 1Βγ που έχουν βρεθεί αριθμητικά είναι πολύ κοντά στις τιμές που έχουν βρεθεί αναλυτικά. Παρακάτω βλέπουμε και τις γραφικές παραστάσεις για την αναλύτικη λύση.

2.ς
Γραφικές Παραστάσεις $d_1(t), d_1'(t)$: